سری فوریه

14-1- خواص کلی

تمرینات

14-1-1 می خواهیم تابع $f(x)$ (به صورت عبارت درجه دوم انتگرال پذیر) را به کمک یک سری فوریه متناهی نمایش دهیم. معیار مناسبی برای دقت سری به کمک انتگرال مربع انحراف برقرار زیر به دست می آید.

$$\Delta P = \int_0^{2\pi} \ [f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{P} (a_n \cos + b_n \sin nx]^2 dx$$

نشان دهید که شرط کیمنه شدن ΔP یعنی:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial b_n} = 0 \ \frac{\partial \Delta p}{\partial a_n} = 0$$

به ازای همه مقادیرn، به انتخاب an و bn به صورتی که در معادله های (14-11) و (14/12) داده شده است، می انجامد.

پاسخ

$$\frac{\partial \Delta_p}{\partial a_n} = \int_0^{2\pi} \ 2\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos nx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \ f(x) \cos nx - \pi a_n = 0 \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ f(x) \cos nx \, dx$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ f(x) \sin \ nx \, dx$$

که برای رسیدن به روابط فوق از روابط تعامد (14-7) و (14-8) و (14-9) استفاده کرده ایم.

14-1-2 در بررسی یک شکل موج پیچیده (کشنده های اقیانوسی، زمین لرزه ها، نوارهای موسیقی و مانند آنها) بهتر است. از سری فوریه ای به صورت زیر بهره گیریم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \ a_n \cos(nx - \theta_n)$$

نشان دهید که این معادله با معادله (14-1) هم ارز است و در آن

$$a_n = a_n \cos \theta_n, b_n = a_n \sin \theta_n, a_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \tan \theta_n = b_n / a_n$$

پاسخ: قبلاً سری فوریه را به صورت زیر تعریف کرده بودیم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \ cos \ nx + b_n \ \sin \ nx) \qquad I$$

سری فوریه جدیدی که در نظر گرفته بودیم به صورت زیر قابل بسط دادن است.

فایل کامل جزوه و تمرین های سری فوریه از لینک زیر دانلود نمایید

https://theresearch.ir/جزوه-و-تمرین-های-سری-فوریه.html

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(cos\theta_n\cos nx+\sin\theta_n\,sin\,nx)\quad II$$

در صورتی که داشته باشیم:

$$a_n=a_n\,cos\theta_n\qquad ,\qquad b_n=a_n\sin\theta_n$$

روابط I و I I هم ارز هستند.

14-1-3 تابع $f(x)$ را به صورت یک سری فوریه نمایی بسط داده ایم.

$$f(x)=\sum_{n=-\theta}^{\infty}C_{n^{e^{inx}}}$$

اگر $f(x)$ حقیقی باشد، $f(x)=f^{*}(x)$ ، چه قیدی روی ضرایب C_n وضع می شود.

پاسخ:

$$f(x)=\sum_{n=-\theta}^{+\theta}C_{n^{e^{inx}}}\rightarrow f^{*}(x)=\sum_{n=-\theta}^{+\theta}C^{*}_{n^{e^{-inx}}}$$

$$f(x)f^{*}(x)\rightarrow C_{n^{e^{inx}}}=C^{*}_{n^{e}}=C_{-n}$$

14-1-4 با فرض اینکه $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]dx$ و $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$ متناهی اند، نشان دهید که

$$\lim_{m\to\theta}a_m=0\qquad ,\qquad \lim_{m\to\theta}b_m=0$$

پاسخ:

$$\int_a^b[f(x)-S_n(x)]^2dx=\int_a^b\left[f(x)-\sum_{m=0}^{n}(a_m\cos mx+b_m\,sin\,mx\right]^2dx\geq 0$$

وقتی $m\to\infty$ میل می کند cosmx و sinmx مقدار معینی ندارند در نتیجه برای اینکه حاصل انتگرال مقدار معینی داشته باشد باید داشته باشیم.

$$\lim_{m\to\infty}a_m=0\qquad \lim_{m\to\infty}b_m=0$$

14-1-5 شگرد مجموعه یابی این بخش را به کار بندید و نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}1/2(\pi-x) & 0<x\leq\pi\\ 1/2(\pi+x) & -\pi\leq x<0\end{cases}$$

به شکل 14-2 مراجعه کنید.

پاسخ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\lim_{2\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\sin nx}{n}=$$

که به ازای $|r|<1$ مطلقاً همگراست. دستور العمل ما به این ترتیب است که تلاش کنیم از طریق تبدیل توابع مثلثاتی به توابع نمایی، سری توانی تشکیل دهیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}e^{inx}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n e^{-inx}}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[-\ln(1-re^{ix})+n(1-re^{-ix})\right]=\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1-re^{-ix}}{1-re^{ix}}\right)$$

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-e^{-ix}}{1-e^{ix}}=\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{1}{e^{ix}}\left(\frac{1-e^{-ix}}{e^{-ix}-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\ln(-e^{-ix})=\frac{1}{2i}\ln(e^{i\pi}e^{-ix})=\frac{1}{2i}(i\pi-ix)\frac{1}{2}(\pi-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}(\pi-x)\qquad 0\le x<\pi$$

چنانچه $-\pi\le x<0$ باشد خواهیم داشت.

$$\frac{1}{2i}\ln\left[(-1)e^{-ix}\right]=\frac{1}{2i}\ln\left[e^{-i\pi}e^{-ix}\right]=\frac{1}{2i}\left[-\imath(\pi+x)\right]=-\frac{1}{2}(\pi+x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{-1}{2}(\pi+x)\qquad -\pi\le x<0$$

14-1-6 مجموع سری مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

و نشان دهید که این مجموع برابر $x/2$ است.

پاسخ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\lim_{r\to 1}\frac{(-1)(-r)^n\sin nx}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n}{n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n e^{inx}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n e^{-inx}}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(1+re^{ix})+\ln(1+re^{-ix})\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+re^{-ix}}{1+re^{+ix}}\right)$$

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(-r)^n \sin nx}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=-\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{+ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{1}{e^{ix}}\left(\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{-ix}}\right)\right]=-\frac{1}{2i}\ln(e^{-ix})-\frac{1}{2i}(-ix)=\frac{x}{2}$$

14-1-7 مجموع سری مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

و نشان دهید که برابر است با

$$\begin{cases}\pi/4 & 0<x<\pi\\ -\pi/4 & -\pi<x<0\end{cases}$$

$$\sum_{n=}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}r^{2n+1}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$$

$$=\lim_{r\to}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{ix})^{2n+1}-(re^{-ix})^{2n+1}}{2i(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{ix})^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{-ix})^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

با استفاده از بسط مقابل، رابطه بالا را ساده می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=\frac{-1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$$

$$\frac{1}{2i}\times\frac{-1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-re^{+ix}}{1+re^{ix}}\right)-\ln\left(\frac{1-re^{-ix}}{1+re^{-ix}}\right)\right]=\frac{-1}{4i}\left[\ln\left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}}\times\frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)\right]$$

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}=\lim_{r\to 1}\frac{-1}{4i}\left[\ln\left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}}\times\frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4i}\left[\ln\left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}}\times\frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)^{-1}\right]=\frac{1}{4i}\ln(-1)=\frac{1}{4i}\ln(e^{\pm i\pi})$$

$$=\frac{+1}{4i}(\pm\pi)=\begin{cases}\pi/4 & 0<x<\pi\\ -\pi/4 & -\pi<x<0\end{cases}$$

14-2 مزایا و موارد استفاده سری فوریه

تمرینات

14-2-1 شرایط مرزی (نظیر $(\psi(0)=\psi(l)=0$ جوابهایی به صورت $\sin(n\pi x/l)$ را ایجاب و کسینوسهای متناظر را حذف می کند.

(الف) تحقیق کنید که در این صورت شرایط مرزی که در نظریه اشتورم- لیوویل منظور می شوند، در بازه $(0,l)$ صدق می کنند دقت کنید که این بازه فقط نصف بازه معمولی فوریه است.

(ب) نشان دهید که مجموعه توابع $n=1,2,3,\ldots\varphi_n(x)=\sin(n\pi x/l)$ در یک رابطه تعامدی به صورت زیر صدق می کنند.

$$\int_0^l \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\frac{l}{2}\delta_{mn}, \qquad n>0$$

پاسخ (الف): چنانچه $u(x)=\sin(n\pi x/l)$ یک جواب مسئله باشد و جواب دیگری به صورت $v(x)=\sin(m\pi x/l)$ داشته باشیم.با استفاده از معادله (9-19) با توجه به شرایط مرزی خواهیم داشت.

$$vPu_a'^b=0\to\sin(m\pi x/l).P(n\pi/l)\cos(n\pi x/l)_0^l$$

$$=\sin=(m\pi).P(n\pi/l)\cos(n\pi)-\sin(0)P(n\pi/l)\cos(0)=0$$

پس شرایط مرزی برقرار است.

(ب):

$$\varphi_m(x)=\sin(m\pi x/l) \qquad , \qquad \varphi_n(x)=\sin(m\pi x/l)$$

$$I=\int_0^l \sin(m\pi x/l)\sin(n\pi x/l)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m-n)\pi}\sin(m-n)\pi x/l-\frac{l}{(m+n)\pi}\sin(m+n)\pi x/l\right]_0^l=\frac{1}{2}[0-0]=0$$

اگر $m\neq n$ باشد، خواهیم داشت.

$$II=\int_0^l \sin(m\pi x/l)\sin(n\pi x/l)dx=I=\int_0^l \sin^2(n\pi x/l)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1-\cos(2n\pi x/l)}{2}=\frac{1}{2}\left[\int_0^l dx-\int_0^l \cos n\pi x/l dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\Big|_0^1-\frac{l}{2n\pi}\sin\left(2n\pi x/l\right)\Big|_0^l\right]=\frac{1}{2}[l-0]=\frac{1}{2}$$

از عبارتهای I و II نتیجه می گیریم که:

$$\int_0^l \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\frac{1}{2}\delta_{mn}$$

4-2-2 (الف) تابع $f(x)=x$ را در بازه $(0,2l)$ بسط دهید. این سری را که یافته اید (سمت راست پاسخ را) روی $(-2l,2l)$ ترسیم کنید.

(ب) $f(x)=x$ را به صورت سری سینوسی در نیم بازه $(0,l)$ بسط دهید. این سری را که یافته اید (سمت راست پاسخ را) روی $(-2l,2l)$ رسم کنید.

پاسخ (الف): تابع $f(x)=x$ تابعی فرد بر حسب x است، در نتیجه با استفاده از معادله (14-22) خواهیم داشت.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(t)dt=\frac{1}{l}\int_0^{2l}tdt=\frac{1}{l}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{2l}\rightarrow a_0=2l\rightarrow\frac{a_0}{2}=l$$

$$b_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt=\frac{1}{l}\int_0^{2l}t\sin\frac{n\pi t}{l}dt$$

$$=\frac{1}{l}\left[-t\left(\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{l}\right)\Big|_0^{2l}+\int_0^{l}\left(\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{l}\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{l}\left[-\frac{2l^2}{n\pi}+\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi t}{l}\Big|_0^{2l}\right]=\frac{2l}{n\pi}\rightarrow x=l-\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(ب): چون می خواهیم بر حسب یک رشته سینوسی تابع $f(x)=x$ را بسط دهیم تمام an ها برابر صفرند و در نتیجه خواهیم داشت بازه مورد نظر باید از x0 تا x0+2l باشد یا انتخاب $x_0=-l$ خواهیم داشت.

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-1}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt=\frac{2}{l}\int_0^{l}t\ \ sin\frac{n\pi t}{l}dt=\frac{2}{l}\left[\left(\frac{-tl}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{l}\right)\Big|_0^{l}\right]$$

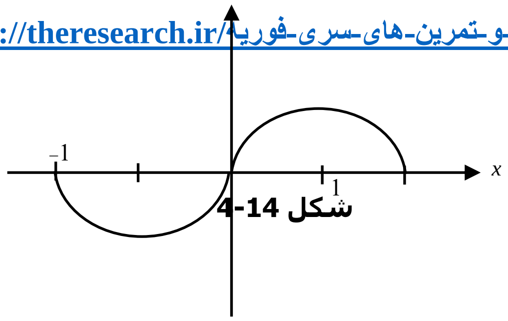
$$14\text{-}2\text{-}=\frac{2}{l}\left[(-1)\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi t\right]=\frac{2l}{n\pi}(-1)(-1)^n=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\rightarrow f(x)=x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

3 در برخی مسائل بهتر است که $\sin\pi x$ در بازه $[0,1]$ را تقریبا توسط سهمی $ax(1-x)$ نشان دهسم که در آن a مقداری است. ثابت برای آنکه از میزان دقت این تقریب برآوردی به دست آورید، $4x(1-x)$ را به صورت یک سری سینوسی فوریه بسط دهید.

$$f(x)\left\{\begin{cases}4x(1-x) & 0\le x\le 1\\ 4x(1+x) & -1\le x\le 0\end{cases}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\ n\pi x$$

به شکل (14-4) توجه کنید.

$f(x)$



شکل 4-14

پاسخ:

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx$$

$$= \left[\int_{-1}^{0} 4x(1+x)\cos n\pi\ x\ dx + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\cos\ n\ \pi\ x\ dx\right]$$

$$= \int_{-1}^{0} -4x(1-x)\cos(-n\pi x)(-dx) + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\cos\ n\ \pi\ x\ dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 4x(1-x)\cos n\pi\ x\ dx + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\cos\ n\ \pi\ x\ dx = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin\ n\pi x dx = \left[\int_{-1}^{0} 4x(1+x)\sin\ n\pi x dx + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\sin\ n\pi x dx\right]$$

$$= \int_{1}^{0} -4x(1-x)\sin(-n\pi x)(-dx) + \int_{1}^{0} 4x(1-x)\sin\ n\pi x dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} 4x(1-x)\sin\ n\pi x dx = 8\left[\int_{0}^{1} x\sin\ n\pi x dx - \int_{0}^{1} x^2 \sin\ n\pi x dx\right]$$

$$= 8\left[\left(\frac{\sin\ n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right) - \frac{2x}{n^2\pi^2}\sin\ n\pi x - \left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{x^2}{n\pi}\right)\cos n\pi x\right]_0^1$$

$$= 8\left[\frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n + \frac{2}{n^3\pi 3}\right]$$

$$= \frac{16}{n^3\pi^3}\left[(-1)^{n+1} + 1\right] = \begin{cases} \frac{32}{\pi^3}\cdot\frac{1}{3} & n\ \text{فرد} \\ 0 & n\ \text{زوج} \end{cases}$$

14-3 کاربردهای سری فوریه

تمرینات

14-3-1 نمایش سری فوریه تابع زیر را تشکیل دهید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \le \omega t \le 0 \\ \sin\ \omega t & 0 \le \omega t \le \pi \end{cases}$$

خروجی یک یکسو ساز نیم موج ساده به این صورت است. اگر گرمای خورشیدی که باعث ایجاد کشند در جو می شود نیز تقریباً به این شکل است.

پاسخ: برای راحتی در حل مسئله تغییر متغیر مقابل را در نظر می گیریم.

$$\omega t = u \rightarrow f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < u < 0 \\ \sin u & 0 < u < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin u du = \frac{1}{\pi}(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin u \cos nudu = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi}\dfrac{1}{n^2-1} & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

كه رابطه بالا مطابق معادله (14-39) نتيجه شده است و به كمك قوائد حاصلضرب توابع مثلثاتي قابل حصول است.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin u \sin nudu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

بنابراين خواهيم داشت:

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

پاسخ: چنانچه در تمرين 14-2-2 قسمت (ب) تغيير متغير مقابل را انجام دهيم به جواب مي رسيم:

$$\frac{n\pi x}{L} \rightarrow nx \rightarrow x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{n\pi x}{L} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rightarrow nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rightarrow x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

14-3-3 يك موج دندانه اراه اي ديگر را مي توان به كمك تابع زير صفر توصيف كرد.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(\pi + x) & -\pi \le x < 0 \\ +\dfrac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

نشان دهيد كه

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\pi x)/n$$

پاسخ:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - x)(-dx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - x)dx = 0$$

در انتگرال دوم $x \to -x$ تبديل كرده و تغييرات لازم را مبذول داشته ايم.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - x)(-dx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - x)dx = 0$$

در انتگرال دوم $x \to -x$ تبديل كرده و تغييرات لازم را مبذول داشته ايم.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - t)\cos ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi + t)\cos ntdt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - t)\cos ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - t)\cos ntdt = 0$$

مي دانيم كه : $\cos(-nt) = \cos nt$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - t)\sin ntdt + \int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi + t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - t)\sin ntdt + \int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - t)\sin(-nt)(-dt)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - t)\sin ntdt + \int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}(\pi - t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - t)\sin ntdt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} + \frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(\sin nx) \quad n$$

4-3-14 موج مثلثي (شكل 14-7) با تابع زير نمايش داده مي شود.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ را با يك سري فوريه نمايش دهيد.

پاسخ:

پاسخ: از شكل 14-7 متوجه مي شويم كه نمودار نسبت به محور عمودي متقارن است و در نتيجه تابعي زوج بر حسب x است، پس b_n ها برابر صفر مي شود.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi \to \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos xdx = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{-4}{\pi}\dfrac{1}{n^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_n \frac{\cos nx}{n^2}$$

14-3-5 تابع زير را در محدوده بازه $|-\pi,\pi|$ بسط دهيد.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x^2<x_0^2\\ 0 & x^2>x_0^2\end{cases}$$

يادآوري: اين موج با پهناي متغير در موسيقي الكترونيكي حائز اهميت است.

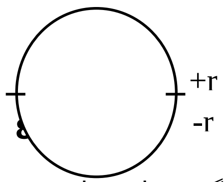
پاسخ:

$$f(x)=1 \qquad -x_0<x<x_0$$

$$a_0=\frac{1}{x_0}\int_{-x_0}^{x_0}dx=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}dx=2\rightarrow\frac{a_0}{2}=1$$

$$a_n=\frac{1}{x_0}\int_{-x_0}^{x_0}\cos nxdx=\frac{2}{nx_0}(\sin nx)_0^{x_0}=\frac{2\sin nx_0}{nx_0}\rightarrow f(x)=1+\frac{2\sin x_0}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

14-3-6 يك لوله استوانه اي فلزي به شعاع a به طور طولي به دو نيمه غير مماس شكافته شده است. نيمه بالايي در پتانسيل v و نيمه پاييني در پتانسيل v− نگه داشته مي شود (شكل (14-8))، متغيرهاي معادله لاپلاس را جدا كنيد و پتانسيل الكترواستاتيكي را به ازاي $r\le a$ به دست آوريد. به تشابه بين جوابي كه به ازاي $r=a$ يافته ايد و سري فوريه مربوط به موج مربعي توجه كنيد.



پاسخ: با توجه به شكل 14-8، وابستگي پتانسيل به دو متغير r و θ به وضوح مشخص مي شود. در نتيجه به كمك معادله لاپلاس با توجه به وابستگي پتانسيل به متغيرهاي θ و r خواهيم داشت.

$$\nabla^2V(r,\theta)\Longrightarrow\frac{1}{r}\frac{r\partial u}{\partial r}\left(\frac{r\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$$

مي دانيم كه جواب اين چنين معادله اي در كتاب مباني الكترومغناطيس به صورت زير است:

$$V(r,\theta)=\sum_n\left[r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)+r^{-n}(A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta)\right]$$

چون پتانسيل را به ازاي نقاط $r\le a$ مي خواهيم، جملات با توانهاي منفي به دليل واگرا شدن در $r=0$ حذف مي شوند در نتيجه خواهيم داشت:

$$V(r,\theta)=\sum_n r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

حال با استفاده از شرايط مرزي و روابط تعامد ضرايب A_n و B_n را به دست مي آوريم.

$$V(a,\theta)=\sum_n a^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

همچنين چون $V(r,\theta)$ تابع فردي از θ است شكل مناسب جواب به صورت زير در مي آيد.

$$V(r,\theta)=\sum_n r^n(B_n\sin n\theta\rightarrow V(a,\theta)=\sum_n B_n a^n\sin n\theta$$

$$\int_0^{2\pi}V(a,\theta)\sin m\theta d\theta=\sum_n B_n a^n\int\sin n\theta\sin m\theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi}V\sin m\theta d\theta-\int_{\pi}^{2\pi}V\sin m\theta d\theta=\sum_n \pi B_n a^n\delta_{m,n}\rightarrow-\frac{V}{m}\cos m\pi+\frac{V}{m}+\frac{V}{m}-\frac{V}{m}\cos m\pi=\pi B_m a^m$$

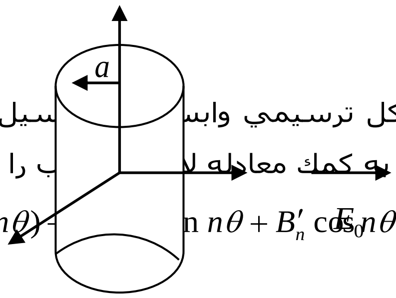
$$B_m=\begin{cases}4V/m\pi a^m & m\text{فرد}\\ 0 & m\text{زوج}\end{cases}$$

$$V(r,\theta)=\frac{4V}{\pi}\sum_{m\text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m\sin m\theta\qquad r<a$$

14-3-7 يك استوانه فلزي را در ميدان الكتريكي يكنواخت (يكنواخت قبل از قرار دادن استوانه E_0 طوري قرار مي دهيم كه محور استوانه عمود بر امتداد اصلي ميدان باشد.

(الف) پتانسيل الكترواستاتيكي مختل شده را بيابيد.

(ب)بار سطحي القائي روي استوانه را به صورت تابعي از موضع زاويه اي پيدا كنيد.



پاسخ (الف): با توجه به شكل ترسيمي وابس سيل بدو متغير r و θ به وضوح مشاهده مي شود، مانند مسئله قبل به كمك معادله لا را به صورت زير به دست مي آوريم.

$$V(r,\theta)=\sum_n\left[r^n(A_n\sin n\theta+B_n\cos n\theta)+ \ldots n\,n\theta+B'_n\cos n\theta)\right]$$

مي دانيم در فواصل $r>>a$ ميدان به صورت يكنواخت در مي آيد.

$$V(r,\theta)=-\int E.d\ell=-E_0 r\cos\theta\qquad r>>a$$

با اعمال اين شرط مرزي خواهيم داشت:

$$V(r,\theta)=r(A_1\sin\theta+B_1\cos\theta)+B_0+\sum_{n=0}^{\infty}r^{-n}(A'_n\sin n\theta+B'_n\cos n\theta)\rightarrow A_1=0\qquad B_1=-E_0$$

$$V(r,\theta)=r(B_0-E_0 r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}r^{-n}(A'_n\sin n\theta+B'_n\cos n\theta)$$

$$E_0 a\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(A'_n\sin n\theta+B'_n\cos n\theta)\to A'_n=0,\begin{cases}B'_n=0 & n\neq 1\\ B'_n=E_0 b^2 & n=1\end{cases}$$

$$V(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+r^{-1}E_0 a^2\cos\theta$$

(ب):

$$E=-\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta}=\hat{r}E_0\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta-\hat{\varphi}E_0\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

(چگالي بار سطحي) $\sigma=\varepsilon_0 E_r\big|r=a=2\varepsilon_0 E_0\cos\theta$

14-3-8 بسط فوريه موج مربعي، مسئله 14-3-6 را به يك سري تواني تبديل كنيد. نشان دهيد كه ضرايب x^{+1} يك سري واگرا تشكيل مي دهند. اين عمل را براي ضرايب x^3 تكرار كنيد. سري تواني را نمي توان براي نا پيوستگي به كار برد. اين ضرايب نامتناهي حاصل تلاش براي غلبه بر اين محدوديت اساسي سري تواني است.

پاسخ: با استفاده از بسط فوريه موج مربعي، معادله (14-36) داريم.

$$f(x)=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$$

از طرفي داريم:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\to\frac{\sin mx}{m}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(xm)^{2n+1}}{m(2n+1)!}$$

حال اگر ضرايب سري فوق را به ازاي m هاي مختلف و n=0 با هم جمع كنيم به دست مي آوريم:

$$\sum_{m\,\text{فرد}}^{\infty}1+1+1+\dots=\infty$$

در نتيجه مجموع اين ضرايب يك سري واگرا تشكيل مي دهند.

در مورد ضريب x^3 اين سري خيلي زودتر واگرا مي شود، كه به ازاي n=1 قابل به دست آوردن است.

$$\sum_{m\,\text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{3!}+\frac{3^3}{3(3!)}+\frac{5^3}{5(3!)}+\dots=\infty$$

14-3-9 (الف) نشان دهيد كه بسط فوريه $\cos ax$ به صورت زير است:

$$\cos ax=\frac{2a\sin\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2}-\frac{\cos x}{a^2-1^2}+\frac{\cos 2x}{a^2-2^2}-\dots\right]$$

$$a_n=(-1)^n\frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}$$

(ب) با استفاده از نتيجه بند قبل نشان دهيد:

$$a\pi \cot a = 1 - 2\sum_{p=1}^{\infty} \xi(2p) a^{2p}$$

اين معادله روش ديگري براي استخراج رابطه بين تابع زتاي ريمان و اعداد برنولي، معادله (15-151) در اختيار ما مي گذارد.

پاسخ (الف): با توجه به آنكه $\cos ax$ تابعي زوج است، در نتيجه b_n برابر صفرند و خواهيم داشت:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(a-n)x + \cos(a+n)x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(a-n)}\sin(a\pi - n\pi) + \frac{1}{(a+n)}\sin(a\pi + n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{(a-n)}\sin(n\pi - a\pi) + \frac{1}{(a+n)}\sin(n\pi + a\pi)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{a-n)}\sin a\pi + \frac{1}{(a+n)}\sin a\pi\right] = (-1)^n \frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}$$

$$\cos ax = \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2 - 2^2} - \dots\right]$$

(ب):

$$\cos ax = \frac{2a\sin a\pi}{2\pi a^2} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{(a^2 - n^2)}$$

به ازاي $x = \pi$ خواهيم داشت:

$$\cos a\pi = \frac{2a\sin a\pi}{2\pi a^2} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{(a^2 - n^2)}$$

$$a\pi \cot a\pi = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2 - n^2)}$$

$$a\pi \cot a\pi = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2/n^2 - 1)} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2/n^2}{(1 - a^2/n^2)}$$

مخرج كسر داخل $\sum$ حاصل جمع تصاعد هندسی $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p}$ با قدر نسبت $\left(\frac{a}{n}\right)^2$ است.

$$a\pi \cot a\pi = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a^2}{n^2}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p+2}$$